Algoritma *Brute Force*

(Bagian 2)

Oleh: Rinaldi Munir

Bahan Kuliah IF2251 Strategi Algoritmik

Contoh-contoh lain

1. **Pencocokan String *(String Matching)***

Persoalan: Diberikan

a. teks (*text*), yaitu (*long*) *string* dengan panjang n karakter

b. *pattern*, yaitu *string* dengan panjang m karakter (asumsi: $m < n$)

Carilah lokasi pertama di dalam teks yang bersesuaian dengan *pattern*.

Algoritma *brute force*:

1. Mula-mula *pattern* dicocokkan pada awal teks.

2. Dengan bergerak dari kiri ke kanan, bandingkan setiap karakter di dalam *pattern* dengan karakter yang bersesuaian di dalam teks sampai:

   – semua karakter yang dibandingkan cocok atau sama (pencarian berhasil), atau
   – dijumpai sebuah ketidakcocokan karakter (pencarian belum berhasil)

3. Bila *pattern* belum ditemukan kecocokannya dan teks belum habis, geser *pattern* satu karakter ke kanan dan ulangi langkah 2.

Contoh 1:

Pattern: NOT

Teks: NOBODY NOTICED HIM

```
  NOBODY NOTICED HIM
1 NOT
2  NOT
3   NOT
4    NOT
5     NOT
6      NOT
7       NOT
8        NOT
```

Contoh 2:

Pattern: 001011

Teks: 10010101**001011**110101010001

```
  10010101001011110101010001
1 001011
2  001011
3   001011
4    001011
5     001011
6      001011
7       001011
8        001011
9         001011
```

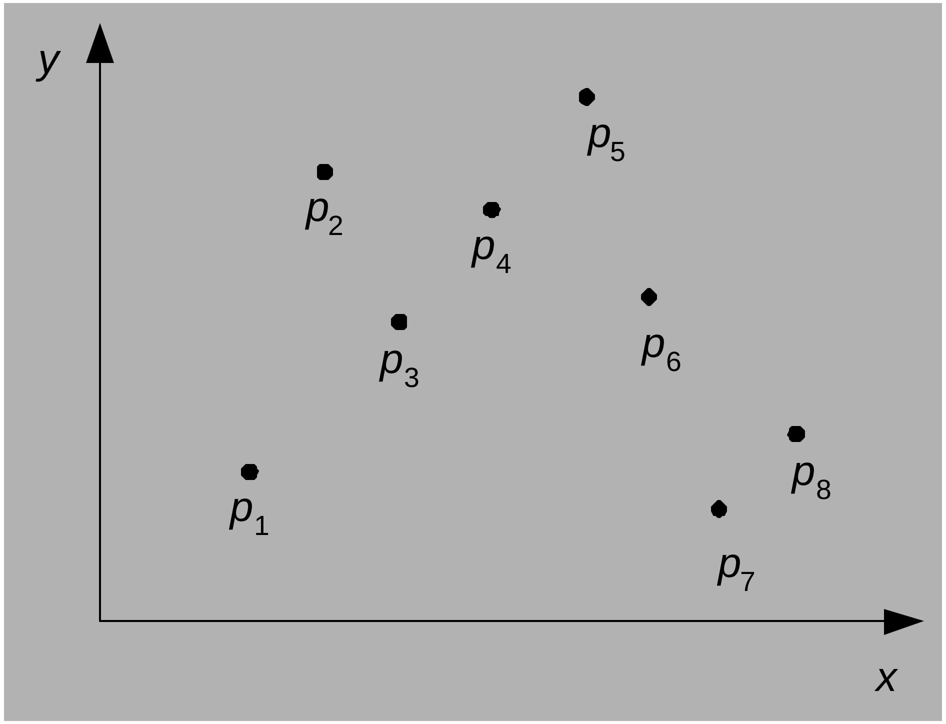
```
procedure PencocokanString(input P : string, T : string,
                  n, m : integer, output idx : integer)
{ Masukan: pattern P yang panjangnya m dan teks T yang
panjangnya n. Teks T direpresentasika sebagai string
(array of character)
Keluaran: lokasi awal kecocokan (idx)
}
Deklarasi
  i : integer
  ketemu : boolean

Algoritma:
  i←0
  ketemu←false
  while (i ≤ n-m) and (not ketemu) do
    j←1
    while (j ≤ m) and (Pj = Ti+j ) do
      j←j+1
    endwhile
    { j > m or Pj ¹ Ti+j }

    if j = m then   { kecocokan string ditemukan }
      ketemu←true
    else
      i←i+1  {geser pattern satu karakter ke kanan teks }
    endif
  endfor
  { i > n – m or ketemu }
  if ketemu then
     idx←i+1
  else
     idx←-1
  endif
```

Kompleksitas algoritma: $O(nm)$ pada kasus terburuk

$O(n)$ pada kasus rata-rata.

2. **Mencari Pasangan Titik yang Jaraknya Terdekat** (*Closest Pairs*)

Persoalan: Diberikan *n* buah titik (2-D atau 3-D), tentukan dua buah titik yang terdekat satu sama lain.



- Jarak dua buah titik, $p_1 = (x_1, y_1)$ dan $p_2 = (x_2, y_2)$ dihitung dengan rumus Euclidean:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Algoritma *brute force*:

1. Hitung jarak setiap pasang titik.
2. Pasangan titik yang mempunyai jarak terpendek itulah jawabannya.

- Algoritma *brute force* akan menghitung sebanyak $C(n, 2) = n(n-1)/2$ pasangan titik dan memilih pasangan titik yang mempunyai jarak terkecil.

Kompleksitas algoritma adalah $O(n^2)$.

```
procedure CariDuaTitikTerdekat(input P : SetOfPoint,
                               n : integer,
                               output P1, P2 : Point)
{ Mencari dua buah titik di dalam himpunan P yang jaraknya
terdekat.
Masukan: P = himpunan titik, dengan struktur data sebagai
berikut
       type Point = record(x : real, y : real)
       type SetOfPoint = array [1..n] of Point
Keluaran: dua buah titik, P1 dan P2 yang ja raknya
terdekat.
}
Deklarasi
  d, dmin : real
  i, j : integer

Algoritma:
  dmin←9999
  for i←1 to n-1 do

    for j←i+1 to n do
      d←√((Pi.x-Pj.x)² + ((Pi.y-Pj.y)²)
      if d < dmin then       { perbarui jarak terdekat }
        dmin←d
        P1←Pi
        P2←Pj
      endif
    endfor

  endfor
```

Kompleksitas algoritma: $O(n^2)$.

Kekuatan dan Kelemahan Metode *Brute Force*

Kekuatan:

1. Metode *brute force* dapat digunakan untuk memecahkan hampir sebagian besar masalah (*wide applicability*).

2. Metode *brute force* sederhana dan mudah dimengerti.

3. Metode *brute force* menghasilkan algoritma yang layak untuk beberapa masalah penting seperti pencarian, pengurutan, pencocokan *string*, perkalian matriks.

4. Metode *brute force* menghasilkan algoritma baku (standard) untuk tugas-tugas komputasi seperti penjumlahan/perkalian *n* buah bilangan, menentukan elemen minimum atau maksimum di dalam tabel (*list*).

Kelemahan:

1. Metode *brute force* jarang menghasilkan algoritma yang mangkus.

2. Beberapa algoritma *brute force* lambat sehingga tidak dapat diterima.

3. Tidak sekontruktif/sekreatif teknik pemecahan masalah lainnya.

- Ken Thompson (salah seorang penemu Unix) mengatakan: "*When in doubt, use brute force*", faktanya kernel Unix yang asli lebih menyukai algoritma yang sederhana dan kuat (*robust*) daripada algoritma yang cerdas tapi rapuh.

Exhaustive Search

Exhaustive search:

- teknik pencarian solusi secara solusi *brute force* untuk masalah-masalah kombinatorik;

- biasanya di antara objek-objek kombinatorik seperti permutasi, kombinasi, atau himpunan bagian dari sebuah himpunan.

Langkah-langkah metode *exhaustive search*:

1. Enumerasi (*list*) setiap solusi yang mungkin dengan cara yang sistematis.

2. Evaluasi setiap kemungkinan solusi satu per satu, simpan solusi terbaik yang ditemukan sampai sejauh ini (*the best solusi found so far*).

3. Bila pencarian berakhir, umumkan solusi terbaik (*the winner*)

- Meskipun algoritma *exhaustive* secara teoritis menghasilkan solusi, namun waktu atau sumberdaya yang dibutuhkan dalam pencarian solusinya sangat besar.

Contoh-contoh *exhaustive search*

1. Travelling Salesperson Problem (TSP)

- Persoalan: Diberikan *n* buah kota serta diketahui jarak antara setiap kota satu sama lain. Temukan perjalanan (*tour*) <u>terpendek</u> yang melalui setiap kota lainnya hanya sekali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.

- Persoalan *TSP* tidak lain adalah menemukan sirkuit Hamilton dengan bobot minimum.

Algoritma *exhaustive search* untuk TSP:

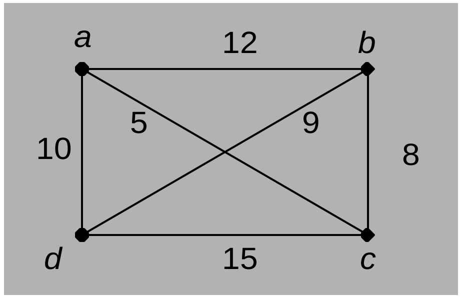
1. Enumerasikan (*list*) semua sirkuit Hamilton dari graf lengkap dengan *n* buah simpul.

2. Hitung (evaluasi) bobot setiap sirkuit Hamilton yang ditemukan pada langkah 1.

3. Pilih sirkuit Hamilton yang mempunyai bobot terkecil.

Contoh 4:

TSP dengan n = 4, simpul awal = a



No.	Rute perjalanan (*tour*)	Bobot
1.	$a \to b \to c \to d \to a$	10+12+8+15 = 45
2.	$a \to b \to d \to c \to a$	12+5+9+15 = 41
3.	***a*®*c*®*b*®*d*®*a***	10+5+9+8 = **32**
4.	$a \to c \to d \to b \to a$	12+5+9+15 = 41
5.	***a*®*d*®*b*®*c*®*a***	10+5+9+8 = **32**
6	$a \to d \to c \to b \to a$	10+12+8+15 = 45

Rute perjalananan terpendek adalah

$a \to c \to b \to d \to a$

$a \to d \to b \to c \to a$

dengan bobot = 32.

- Untuk n buah simpul semua rute perjalanan dibangkitkan dengan permutasi dari n – 1 buah simpul.

- Permutasi dari n – 1 buah simpul adalah

$$(n - 1)!$$

- Pada contoh di atas, untuk n = 6 akan terdapat

$$(4 - 1)! = 3! = 6$$

buah rute perjalanan.

- Jika diselesaikan dengan *exhaustive search*, maka kita harus mengenumerasi sebanyak (n – 1)! buah sirkuit Hamilton, menghitung setiap bobotnya, dan memilih sirkuit Hamilton dengan bobot terkecil.

- Kompleksitas waktu algoritma *exhaustive search* untuk persoalan TSP sebanding dengan (n – 1)! dikali dengan waktu untuk menghitung bobot setiap sirkuit Hamilton.

- Menghitung bobot setiap sirkuit Hamilton membutuhkan waktu $O(n)$, sehingga kompleksitas waktu algoritma *exhaustive search* untuk persoalan TSP adalah $O(n \cdot n!)$.

- **Perbaikan**: setengah dari rute perjalanan adalah hasil pencerminan dari setengah rute yang lain, yakni dengan mengubah arah rute perjalanan

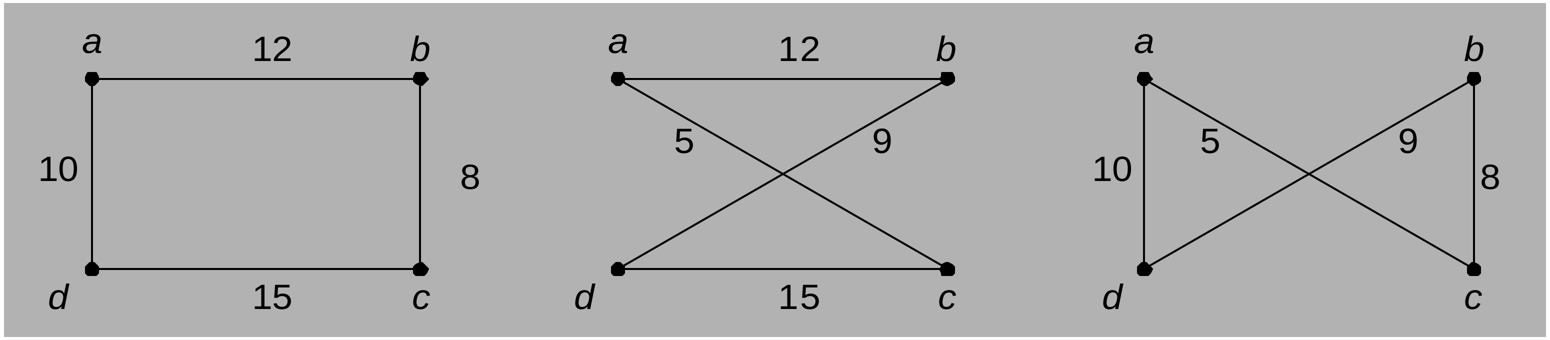
  1 dan 6

  2 dan 4

  3 dan 5

- maka dapat dihilangkan setengah dari jumlah permutasi (dari 6 menjadi 3).

- Ketiga buah sirkuit Hamilton yang dihasilkan:



- Untuk graf dengan *n* buah simpul, kita hanya perlu mengevaluasi (*n* – 1)!/2 sirkuit Hamilton.

- Untuk ukuran masukan yang besar, jelas algoritma *exhaustive search* menjadi sangat tidak mangkus.

- Pada persoalan *TSP*, untuk *n* = 20 akan terdapat (19!)/2 = 6 $\times$ 1016 sirkuit Hamilton yang harus dievaluasi satu per satu.

- Sayangnya, untuk persoalan TSP tidak ada algoritma lain yang lebih baik daripada algoritma *exhaustive search*.

- Jika anda dapat menemukan algoritma yang mangkus untuk TSP, anda akan menjadi terkenal dan kaya!

- Algoritma yang mangkus selalu mempunyai kompleksitas waktu dalam orde polinomial.

2. 1/0 Knapsack

- **Persoalan:** Diberikan n buah objek dan sebuah *knapsack* dengan kapasitas bobot K. Setiap objek memiliki properti bobot (*weigth*) w_i dan keuntungan(*profit*) p_i.

  Bagaimana memilih memilih objek-objek yang dimasukkan ke dalam *knapsack* sedemikian sehingga memaksimumkan keuntungan. Total bobot objek yang dimasukkan ke dalam *knapsack* tidak boleh melebihi kapasitas *knapsack*.

- Persoalan 0/1 *Knapsack* dapat kita pandang sebagai mencari himpunan bagian (*subset*) dari keseluruhan objek yang muat ke dalam *knapsack* dan memberikan total keuntungan terbesar.

- Solusi persoalan dinyatakan sebagai:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

x_i = 1, jika objek ke-i dipilih,

x_i = 0, jika objek ke-i tidak dipilih.

Formulasi secara matematis:

Maksimasi $F = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

dengan kendala (*constraint*)

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq K$$

yang dalam hal ini, $x_i = 0$ atau 1, $i = 1, 2, \ldots, n$

Algoritma *exhaustive search:*

1. Enumerasikan (*list*) semua himpunan bagian dari himpunan dengan n objek.

2. Hitung (evaluasi) total keuntungan dari setiap himpunan bagian dari langkah 1.

3. Pilih himpunan bagian yang memberikan total keuntungan terbesar.

Contoh: $n = 4$.

$w_1 = 2$; $p_1 = 20$

$w_2 = 5$; $p_2 = 30$

$w_3 = 10$; $p_3 = 50$

$w_4 = 5$; $p_4 = 10$

Kapasitas *knapsack* $K = 16$

Langkah-langkah pencarian solusi 0/1 *Knapsack* secara *exhaustive search* dirangkum dalam tabel di bawah ini:

Himpunan Bagian	Total Bobot	Total keuntungan
{}	0	0
{1}	2	20
{2}	5	30
{3}	10	50
{4}	5	10
{1, 2}	7	50
{1, 3}	12	70
{1, 4}	7	30
{2, 3}	**15**	**80**
{2, 4}	10	40
{3, 4}	15	60
{1, 2, 3}	17	tidak layak
{1, 2, 4}	12	60
{1, 3, 4}	17	tidak layak
{2, 3, 4}	20	tidak layak
{1, 2, 3, 4}	22	tidak layak

- Himpunan bagian objek yang memberikan keuntungan maksimum adalah {2, 3} dengan total keuntungan adalah 80.
- Solusi: X = {0, 1, 1, 0}

- Berapa banyak himpunan bagian dari sebuah himpunan dengan n elemen? Jawabnya adalah 2^n.

  Waktu untuk menghitung total bobot objek yang dipilih = $O(n)$

  Sehingga, Kompleksitas algoritma *exhaustive search* untuk persoalan 0/1 *Knapsack* = $O(n. 2^n)$.

- TSP dan 0/1 *Knapsack*, adalah contoh persoalan eksponensial. Keduanya digolongkan sebagai persoalan *NP* (*Non-deterministic Polynomial*), karena tidak mungkin dapat ditemukan algoritma polinomial untuk memecahkannya.

Latihan

(yang diselesaikan secara *exhaustive search*)

1. (**Masalah Penugasan**) Misalkan terdapat *n* orang dan *n* buah pekerjaan (*job*). Setiap orang akan di-*assign* dengan sebuah pekerjaan. Penugasan orang ke-*i* dengan pekerjaan ke-*j* membutuhkan biaya sebesar $c(i, j)$. Bagaimana melakukan penugasan sehingga total biaya penugasan adalah seminimal mungkin? Misalkan instansiasi persoalan dinyatakan sebagai matriks *C* sebagai berikut

$$C = \begin{bmatrix} Job\,1 & Job\,2 & Job\,3 & Job\,4 \\ 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{Orang } a \\ \text{Orang } b \\ \text{Orang } c \\ \text{Orang } d \end{array}$$

2. (**Masalah partisi**). Diberikan *n* buah bilangan bulat positif. Bagilah menjadi dua himpunan bagian *disjoint* sehingga setiap bagian mempunyai jumlah nilai yang sama (catatan: masalah ini tidak selalu mempunyai solusi).

   Contoh: $n = 6$, yaitu 3, 8, 4, 6, 1, 2, dibagidua menjadi {3, 8, 1} dan {4, 6, 2} yang masing-masing jumlahnya 12.

   Rancang algoritma *exhaustive search* untuk masalah ini. Cobalah mengurangi jumlah himpunan bagian yang perlu dibangkitkan.

3. (**Bujursangkar ajaib**). Bujursangkar ajaib (*magic square*) adalah pengaturan n buah bilangan dari 1 hingga n^2 di dalam bujursangkar yang berukuran n x n sedemikian sehingga jumlah nilai setiap kolom,baris, dan diaginal sama. Rancanglah algoritma *exhaustive search* untuk membangkitkan bujursangkar ajaib orde n.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Exhaustive Search di dalam Kriptografi

- Di dalam kriptografi, *exhaustive search* merupakan teknik yang digunakan penyerang untuk menemukan kunci enkripsi dengan cara mencoba semua kemungkinan kunci.

Serangan semacam ini dikenal dengan nama *exhaustive key search attack* atau *brute force attack*.

- Contoh: Panjang kunci enkripsi pada algoritma *DES* (*Data Encryption Standard*) = 64 bit.

  Dari 64 bit tersebut, hanya 56 bit yang digunakan (8 bit paritas lainnya tidak dipakai).

- Jumlah kombinasi kunci yang harus dievaluasi oleh pihak lawan adalah sebanyak

  $(2)(2)(2)(2)(2) \ldots (2)(2) = 2^{56} =$ 7.205.759.403.7927.936

- Jika untuk percobaan dengan satu kunci memerlukan waktu 1 detik, maka untuk jumlah kunci sebanyak itu diperlukan waktu komputasi kurang lebih selama 228.4931.317 tahun!

- Algoritma *exhaustive search* tidak mangkus sebagaimana ciri algoritma *brute force* pada umumnya

- Namun, nilai plusnya terletak pada keberhasilannya yang selalu menemukan solusi (jika diberikan waktu yang cukup).

Mempercepat Algoritma *Exhaustive Search*

- Algoritma *exhaustive search* dapat diperbaiki kinerjanya sehingga tidak perlu melakukan pencarian terhadap semua kemungkinan solusi.

- Salah satu teknik yang digunakan untuk mempercepat pencarian solusi adalah teknik **heuristik** (*heuristic*).

- Teknik heuristik digunakan untuk mengeliminasi beberapa kemungkinan solusi tanpa harus mengeksplorasinya secara penuh. Selain itu, teknik heuristik juga membantu memutuskan kemungkinan solusi mana yang pertama kali perlu dievaluasi.

- Heuristik adalah seni dan ilmu menemukan (*art and science of discovery*).

  Kata heuristik diturunkan dari Bahasa Yunani yaitu “*eureka*” yang berarti “menemukan” (*to find* atau *to discover*).

- Matematikawan Yunani yang bernama Archimedes yang melontarkan kata "*heureka*", dari sinilah kita menemukan kata “*eureka*” yang berarti “*I have found it*.”

- Heuristik berbeda dari algoritma karena heuristik berlaku sebagai panduan (*guideline*), sedangkan algoritma adalah urutan langkah-langkah penyelesaian.

- Heuristik mungkin tidak selalu memberikan hasil yang diinginkan, tetapi secara ekstrim ia bernilai pada pemecahan masalah.

- Heuristik yang bagus dapat secara dramatis mengurangi waktu yang dibutuhkan untuk memecahkan masalah dengan cara mengeliminir kebutuhan untuk mempertimbangkan kemungkinan solusi yang tidak perlu.

- Heuristik tidak menjamin selalu dapat memecahkan masalah, tetapi seringkali memecahkan masalah dengan cukup baik untuk kebanyakan masalah, dan seringkali pula lebih cepat daripada pencarian solusi secara lengkap.

- Sudah sejak lama heuristik digunakan secara intensif di dalam bidang intelijensia buatan (*artificial intelligence*).

- *Contoh penggunaan heuristik untuk mempercepat algoritma exhaustive search*

Contoh: Masalah *anagram*. *Anagram* adalah penukaran huruf dalam sebuah kata atau kalimat sehingga kata atau kalimat yang baru mempunyai arti lain.

Contoh-contoh *anagram* (semua contoh dalam Bahasa Inggris):

lived $\rightarrow$ *devil*

tea $\rightarrow$ *eat*

charm $\rightarrow$ *march*

- Bila diselesaikan secara *exhaustive search*, kita harus mencari semua permutasi huruf-huruf pembentuk kata atau kalimat, lalu memerika apakah kata atau kalimat yang terbentuk mengandung arti.

- Teknik heuristik dapat digunakan untuk mengurangi jumlah pencarian solusi. Salah satu teknik heuristik yang digunakan misalnya membuat aturan bahwa dalam Bahasa Inggris huruf *c* dan *h* selalu digunakan berdampingan sebagai *ch* (lihat contoh *charm* dan *march*), sehingga kita hanya membuat permutasi huruf-huruf dengan *c* dan *h* berdampingan. Semua permutasi dengan huruf *c* dan *h* tidak berdampingan ditolak dari pencarian.